جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني 2016-2017
أسئلة مقرر التحليل التابعي (1)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة: ساعة ونصف
العلامة: (100) درجة
الاسم:

السؤال الأول (30 درجة): (1) لتكن $q,p > 1$ بحيث: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وأثبت أن

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , a_k,b_k \ge 0 \quad (k=1,2,\dots,n)$$

(2) لتكن $E=\{z=x+iy : x>0 , y>0\}$ هل هذه المجموعة محدبة ومتوازنة وماصة ؟ بين ذلك مع الحل.

(3) ليكن التطبيق $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ ايزومتري، أثبت أنه مستمر بانتظام وهوميومورفيزم.

السؤال الثاني (20 درجة): (أ) أثبت أن الفضاء المتري التام هو مجموعة من الصنف الثاني، وهات مثالاً عن مجموعة من الصنف الأول مع الحل.

(ب) ليكن التطبيق: $A : C[0,1] \to C[0,1]$

والمعرف بالعلاقة: $A(f(x)) = \frac{1}{2}\int_0^1 xtf(t)dt + \frac{5}{6}x$

المطلوب: أثبت أنه تطبيق ضاغط في الفضاء $C[0,1]$، وأوجد النقطة الثابتة له.

السؤال الثالث (10+10=20 درجة): (1)- في فضاء هيلبرت H أثبت صحة المتراجحة (متراجحة شفارتز): $x,y\in H$: $|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$

(2)- ليكن $x,y\in H$ أي عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة العلاقة:

$$\langle x,y\rangle = \left[\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right] + i\left[\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2\right]$$

السؤال الرابع (20 درجة): بفرض $X_1, X_2, \dots$ قاعدة في فضاء باناخ B، ولتكن S مجموعة كل المتتاليات العددية $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\}$ التي من أجلها تتقارب السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k X_k$:

أثبت أن المؤثر A المعرف كما يلي:

$$A : S \longrightarrow B$$
$$A(\alpha) = X \quad : \quad X = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k$$

مؤثر خطي و محدود وأوجد نظيمه. أوجد المؤثر المرافق A^* ماذا تستنتج ؟

السؤال الخامس (10 درجات): أوجد الفضاء المرافق للفضاء ℓ_1.

انتهت الأسئلة

مدرسا المقرر

حمص في 10 / 7 / 2017 م   مع التمنيات بالنجاح والتوفيق   د. سامح العرجة   د. منير مخلوف

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٦-٢٠١٧
شلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة و نصف
العلامة:(١٠٠) درجة

جواب السؤال الأول (---- درجة) : خاص بالدكتور منير مخلوف

جواب السؤال الثاني (-----درجة) : خاص بالدكتور منير مخلوف

جواب السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠درجة) :

١)- أياً كان العنصران $x,y\in H$ تصح المتراجحة (متراجحة شفارتز):

$$|\langle x,y\rangle|=\sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

وتكون المساواة إذا كان $x=\theta$ أو $y=\theta$ أو $x=\alpha y$ حيث α عدد عقدي مناسب .

الإثبات :

إذا كان $x=\theta$ أو $y=\theta$ فالمساواة واضحة تماماً وإذا كان $x=\alpha y$ يكون لدينا :

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle|^2=|\langle \alpha y,y\rangle|^2&=\langle \alpha y,y\rangle.\overline{\langle \alpha y,y\rangle}\\&=\alpha.\overline{\alpha}.\langle y,y\rangle.\langle y,y\rangle\\&=\langle \alpha y,\alpha y\rangle.\langle y,y\rangle\\&=\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle\end{aligned}$$

وبالتالي يكون :

$$|\langle x,y\rangle|=\sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

الآن من أجل أي عنصرين $x,y\in H$ بحيث $\langle x,y\rangle\neq 0$ عندئذٍ من أجل أي عدد عقدي λ يكون لدينا :

$$\langle x-\lambda y,x-\lambda y\rangle\geq 0$$

$$\langle x,x\rangle-\overline{\lambda}\langle x,y\rangle-\lambda\langle y,x\rangle+|\lambda|^2\langle y,y\rangle\geq 0$$

نأخذ : $\lambda:=\dfrac{\langle x,x\rangle}{\langle y,x\rangle}$ فنجد أنّ :

$$\langle x,x\rangle-\langle x,x\rangle-\langle x,x\rangle+\frac{\langle x,x\rangle^2}{|\langle y,x\rangle|^2}\langle y,y\rangle\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle}{|\langle y,x\rangle|^2}\geq 1$$

$$\Rightarrow|\langle y,x\rangle|^2\geq\langle x,x\rangle.\langle y,y\rangle$$

وأخيراً فإنّ :

$$|\langle x,y\rangle|\geq\sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

٢)- ليكن x, y أي عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة العلاقة :

$$\langle x,y\rangle=\left[\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right]+i\left[\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2\right]$$

(2)

$$\cdot\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\left\langle\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right\rangle-\left\langle\frac{x-y}{2},\frac{x-y}{2}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{4}\langle x+y,x+y\rangle-\frac{1}{4}\langle x-y,x-y\rangle$$

(2)

$$=\frac{1}{4}\left[\|x\|^2+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\|y\|^2-\|x\|^2+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle-\|y\|^2\right]$$

(2)

$$=\frac{1}{4}\left[2\langle x,y\rangle+2\langle y,x\rangle\right]=\frac{1}{2}\left[2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle\right]=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$$

(2)

$$\cdot\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left[i\langle x,y\rangle-i\langle y,x\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[2\operatorname{Im}\langle x,y\rangle\right]=\operatorname{Im}\langle x,y\rangle$$

(2)

وبالتالي فإن $II=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+i\operatorname{Im}\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle=I$

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة):

١)- لنبرهن اولاً أن A خطي: (5)

$$A(\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta)=\lambda_1X+\lambda_2Y \qquad :\forall\lambda_2,\lambda_1\in\mathbb{C}\ \&\ X=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k\ ,\ Y=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k x_k$$

حسب تعريف المؤثر يكون :

$$A(\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta)=A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1,\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2,\lambda_1\alpha_3+\lambda_2\beta_3,......)=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_1\alpha_k+\lambda_2\beta_k)x_k=$$

$$\lambda_1\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k+\lambda_2\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k x_k=\lambda_1 x+\lambda_2 y$$

اذن خطي .

لنأخذ النظيم S ; $\alpha\in S$ $\|\alpha\|_S=\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\|_B$ المحقق لشروط النظيم (لا يطلب اثبات أنه يحقق الشروط)

محدود (أو مستمر) (5) $|A(\alpha)|=|X|\le\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\|=\|\alpha\|$ اذن A محدود .

ايجاد النظيم (5) من المحدودية $\quad(*)\quad \|A\|=\frac{|A(\alpha)|}{\|\alpha\|}\le 1$

لنأخذ $\alpha=(1,0,0,....)$ واضح أن $\|\alpha\|=1$ كما أن :

$$|A(\alpha)| = |X| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right| \geq \|\alpha\| \Rightarrow$$

$$\|A\| = \sup|A(\alpha)| \geq 1 \quad (**)$$

من (*) و (**) نجد أن $\|A\|=1$

5

حسب تعريف المؤثر المرافق $\langle A\,\alpha,\beta\rangle = \langle \alpha, A^*\beta\rangle$ أي أن يكون معرف جداء داخلي لعناصر المنطلق مع عناصر المستقر وهنا الجداء الداخلي غير معطى ولا يمكن تعريفه بين فضاء باناخ B و S مجموعة كل المتتاليات العددية لاختلاف طبيعة العناصر . نستنتج وفق معطيات المسألة أن A^* غير موجود.

جواب السؤال الخامس (١٠ درجات):

لنأخذ (e_i) قاعدة شاودر للفضاء ℓ_1 عندئذٍ كل عنصر x من ℓ_1 يكتب بالشكل: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$

2

ليكن f دالياً خطياً محدوداً. عندئذٍ:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i \quad (26)$$

حيث $f_i = f(e_i)$ تتعرف بشكل وحيد بواسطة الدالي f.

2

ولما كان $\|e_i\|=1$ فإن: $|f_i| = |f(e_i)| \leq \|f\|\,\|e_i\| = \|f\|$ أي:

$$\sup_i |f_i| \leq \|f\| \quad (27)$$

فإن $\ell_\infty \ni (f_i)$.

2

من جهة أخرى ومن أجل كل عنصر من ℓ_∞ وليكن $\zeta = (\zeta_i)$ يمكننا إيجاد دالي خطي محدود g على ℓ_1 بحيث يكون: $g(x) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \zeta_i$ حيث $\ell_1 \ni x = (\zeta_i)$.

نلاحظ أن $g \in \ell_1^*$ لأن g خطي ومحدود وأن:

2

$$|g(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i . \zeta_i| \leq \sup_i \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \|x\| \sup_i |\zeta_i|$$

من العلاقة (26):

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i . f_i| \leq \sup_i \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \|x\| \sup_i |f_i|$$

2

بأخذ $\|x\|=1$ نجد: $\|f\| \leq \sup_i |f_i| \quad (28)$

من المتراجحتين (27) و (28) نستنتج : $\|f\| = \sup_i |f_i|$

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_∞. وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق ℓ_1 هو الفضاء ℓ_∞.

حمص في / ٧ / ٢٠١٧ م. انتهت الإجابات مدرسا المقرر

د. سامح العرجة ود. منير مخلوف